

# Analyse spectrale paramétrique

Kévin POLISANO, PAUL BOUTON, TONY BUTHOD–GARCON, KYLIAN VINCENT

2 mai 2017

## Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
1.1 Problématique	2
1.2 Algorithmes d'estimation spectrales	2
<b>2 Méthodes d'estimation spectrale via les données directes</b>	<b>3</b>
2.1 Méthode de Prony	3
2.2 Méthode de Rahman et Yu (TLS–Prony)	5
2.3 Méthode de Matrix Pencil	5
<b>3 Méthodes d'estimation spectrale à partir de la fonction d'autocorrélation</b>	<b>7</b>
3.1 Méthode de Yule–Walker	7
3.2 Méthode de Pisarenko	10
3.2.1 Principe de la méthode	10
3.2.2 Mise en œuvre	11
3.3 Méthode Root-MUSIC	12
3.4 Méthode ESPRIT	12
<b>4 Comparaison des méthodes</b>	<b>15</b>
4.1 Borne de Cramer-Rao	15
4.2 Méthodologie	16
4.2.1 Retour sur l'utilisation de la FFT	17
4.2.2 Espacement des fréquences	17
4.2.3 Amplitudes relatives	19
4.2.4 Nombre de fréquences	20
4.2.5 Localisation des fréquences	21
4.2.6 Nombre d'échantillons du signal d'entrée	21
4.2.7 Temps de calcul	22
4.3 Conclusion des expérimentations	23
<b>5 Conclusion</b>	<b>23</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Problématique

Aujourd'hui, de nombreux problèmes physiques nécessitent la reconstruction des paramètres d'un signal sinusoïdal à partir de données échantillonnées. Ces données sont généralement bruitées, ce qui complique cette reconstruction.

Lorsque ces paramètres sont des fréquences, une méthode simple pour la reconstruction semble être la Transformée de Fourier Discrète (TFD). En effet, celle-ci calcule un spectre discret du signal, nous permettant d'avoir accès à une estimation des différentes fréquences qui le composent.

Cependant, cette méthode de résolution possède de nombreux défauts. Tout d'abord, elle se révèle peu précise si deux fréquences sont proches puisque que ces dernières peuvent se retrouver confondues sur le spectre. De plus, le spectre obtenu est discrétisé ce qui approxime les fréquences calculées. Ainsi, pour un signal d'entrée de taille  $N$ , le pas du spectre obtenu par TFD étant  $dw = \frac{2\pi}{TN}$ , la précision maximale sur les fréquences sera de l'ordre de  $\frac{dw}{2}$  et cela même sans bruit ajouté.

Par exemple, pour  $N = 256$ , on construit le signal suivant constitué de 3 pulsations :

$$\forall n = 1 \dots N, \quad signal(n) = \sum_{k=1}^3 a_k e^{i w_k n} \quad (1)$$

avec  $w_1 = 0.7$ ,  $w_2 = 1.5$ ,  $w_3 = 2.1$  et  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ . Dans cet exemple, on prend un signal relativement simple : il n'est constitué que de 3 pulsations bien séparées, les amplitudes sont toutes égales à 1, et aucun bruit n'est ajouté. En appliquant la méthode de résolution par TFD, on obtient alors :

$$\tilde{w}_1 = 2.1107576, \quad \tilde{w}_2 = 1.4971652, \quad \tilde{w}_3 = 0.7117671$$

On voit ainsi que la TFD ne peut pas fournir des résultats précis, et face à cette problématique, de nombreux algorithmes d'estimation spectrales ont vu le jour.

Ce rapport présente, en détail, la plupart de ces méthodes alternatives et en compare les résultats.

## 1.2 Algorithmes d'estimation spectrales

Les algorithmes d'estimation spectrale se scindent en deux familles avec d'un côté les méthodes dites paramétriques, initiées par Prony en 1795 dans son essai ([PRONY, 1795](#)), et de l'autre les méthodes dites non paramétriques, initiées par Legendre en 1805 avec l'introduction des moindres carrés non linéaires pour la détection de comètes ([LEGENDRE, 1805](#)). La méthode de Prony possède de multiples défauts numériques et statistiques : elle fournit une estimation biaisée des fréquences, et la covariance des fréquences s'écarte grandement de la borne de Cramér-Rao de plusieurs ordres de magnitude. De plus les estimations sont très sensibles aux erreurs d'arrondis, même pour un faible nombre d'exponentielles. De nombreuses variantes de la méthodes de Prony ont été développées, sans toutefois parvenir à régler simultanément tous ces problèmes sans recourir à un grand nombre de calculs coûteux. Inversement, la formulation par moindre carrés non linéaire possède de bonnes propriétés statistiques et numériques, mais

demande des itérations coûteuses. Dans les deux cas, qui font l'objet d'une partie distincte, le problème consiste à déterminer les fréquences  $\omega_k \in [0, 2\pi]$  et les amplitudes  $d_k \in \mathbb{C}$  d'un signal

$$x(t) = \sum_{k=1}^K d_k e^{j\omega_k t}, \quad (2)$$

à partir de mesures bruitées de ce dernier. On suppose dans toute la suite que  $N$  échantillons sont prélevés sur une grille régulière  $t_i = \delta i$ , et que le signal est perturbé par un bruit gaussien  $\epsilon_i$  :

$$y_i = \sum_{k=1}^K d_k e^{j\omega_k i} + \epsilon_i, \quad 0 \leq i < N \quad (3)$$

où  $\delta$  a été absorbé dans les fréquences. En l'absence de bruit, le théorème de Carathéodory assure qu'une telle décomposition existe et est unique. Si on considère les  $\omega_k$  comme étant des racines  $N$ -ième de l'unité  $2\pi \frac{k}{N}$ , alors les amplitudes  $d_k$  sont données par la transformée de Fourier discrète des  $y_i$  :  $d = \mathcal{F}_N^* y$ .

## 2 Méthodes d'estimation spectrale via les données directes

### 2.1 Méthode de Prony

La première méthode de reconstruction, publiée par Prony, se base sur un polynôme annulateur des coefficients exponentiels  $e^{j\omega_k t}$  du signal  $y_i$ , ( $0 \leq i < N$ ). Par la suite on note  $(z_k)_{k=1\dots K}$  ces coefficients exponentiels.

La première méthode de reconstruction des amplitudes et fréquences d'un signal, publiée par Prony, se base sur la convolution des données d'entrée avec un filtre particulier. On étudiera ci-après des données d'entrée non-bruitées, soit :

$$y_i = \sum_{k=1}^K d_k e^{-j\omega_k i}, \quad 0 \leq i < N \quad (4)$$

Par la suite on note  $(z_k)_{k=1\dots K}$  les composantes exponentielles des données :

$$(z_k)_{k=1\dots K} = e^{-j\omega_k} \quad (5)$$

On utilise maintenant un polynôme annulateur des  $(\bar{z}_k)_{k=1\dots K}$  pour construire le filtre suivant (on note  $h_k$  les coefficients de ce polynôme) :

$$H(z) = \prod_{k=1}^K (z - \bar{z}_k) \quad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^K h_k z^k \quad (7)$$

En réalisant la convolution de ce filtre avec les données on obtient :

$$y_i * H = \sum_{l=0}^K y_{i-l} h_l \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^K h_l \left( \sum_{k=1}^K d_k z_k^{i-l} \right) \\ &= \sum_{k=1}^K d_k z_k^i \left( \sum_{l=0}^K h_l z_k^{-l} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^K h_l z_k^{-l} &= H(\overline{z_k}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi en remplaçant dans l'équation (8) on obtient,  $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$y_i * H = 0 \quad (10)$$

ie,

$$\sum_{l=0}^K y_{i-l} h_l = 0 \quad (11)$$

On peut transformer cette équation pour obtenir un modèle auto régressif sur les données en normalisant le polynôme obtenu par  $h_0$ . En effet, on peut supposer sans perte de généralité que  $h_0 \neq 0$  car dans le cas contraire on peut alors se ramener à un cas d'étude similaire avec  $K' = K - 1$ , une des composantes recherchées étant alors la valeur nulle ( $w_k = 0, d_k = 0$ ).

En normalisant le polynôme on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^K y_{i-l} h'_l + y_i &= 0 \\ \iff \sum_{l=1}^K y_{i-l} h'_l &= -y_i \end{aligned} \quad (12)$$

Avec  $h'_l = \frac{h_l}{h_0}$

On obtient alors un système de  $N - K$  équations, qu'on peut représenter par le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} y_K & y_{K-1} & \cdots & y_1 \\ y_{K+1} & y_K & \cdots & y_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_K \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_{K+1} \\ y_{K+2} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (13)$$

Une résolution de ce système nous permet alors de trouver les coefficients  $h'_l, 1 \leq l \leq K$ . On sait par ailleurs que  $h'_0 = 1$  d'après la normalisation effectuée plus haut. Le polynôme  $H(z)$  normalisé est alors :

$$H(z) = \sum_{k=0}^K h'_k z^k \quad (14)$$

Ses racines correspondent alors aux  $(\overline{z_k})_{k=1 \dots K}$ , comme posé en équation (6) et on obtient alors les fréquences recherchées par :

$$\begin{aligned} w_k &= \arg(z_k) \\ &= -\arg(\overline{z_k}), \quad 0 \leq k < K \end{aligned} \quad (15)$$

Ainsi, la méthode de Prony se résume à :

---

Construction des matrices composant le système matriciel présenté en équation (13).  
 Résolution de ce système pour obtenir les coefficients  $h_l$  du polynôme annulateur des fréquences.  
 Calcul des racines  $\alpha_i$  de ce polynôme.  
 Les fréquences recherchées sont les opposées des arguments de ces racines.

---

## 2.2 Méthode de Rahman et Yu (TLS–Prony)

Cette méthode prend en compte le bruit dans le vecteur  $\mathbf{y}$  et pas uniquement dans la matrice. Ainsi, TLS–Prony est rendue plus robuste au bruit par une technique différente d'obtention des coefficients du polynôme (6)  $H(z)$ . On ne va pas chercher à obtenir le système matriciel (13) à partir du modèle auto-régressif, mais partir de l'équation (11) :

$$\sum_{l=0}^K y_{i-l} h_l = 0 \quad (16)$$

On l'utilise alors pour former le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} y_{K+1} & \cdots & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_N & \cdots & y_{N-K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Ce système est alors résolvable en recherchant le noyau (vecteur propre associé à la valeur propre 0) de la matrice  $\mathbf{T}_k$  :

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} y_{K+1} & \cdots & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_N & \cdots & y_{N-K} \end{pmatrix} \quad (18)$$

La fin de la résolution est ensuite semblable à celle de la méthode de Prony avec l'étude du polynôme  $H(z)$ .

Ainsi, la méthode de Prony–TLS se résume à :

---

Construction de la matrice  $\mathbf{T}_k$ .  
 Recherche du noyau de cette matrice (les  $K$  valeurs propres les plus faibles).  
 Construction du polynôme annulateur (16).  
 Calcul des racines  $\alpha_i$  de ce polynôme.  
 Les fréquences recherchées sont les opposés des arguments de ces racines.

---

## 2.3 Méthode de Matrix Pencil

La méthode de Matrix Pencil repose sur une décomposition matricielle astucieuse du signal. La forme du signal telle qu'exposée pour la méthode de Prony reste la suivante :

$$y_i = \sum_{k=1}^K d_k z_i, \quad 0 \leq i < N \quad (19)$$

On pose ensuite les matrices de Hankel suivantes, où  $p$  est appelé *Paramètre de Pencil* (Il est recommandé de prendre  $\frac{N}{3} \leq p \leq \frac{N}{2}$ ) :

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{p-1} \\ y_1 & x_2 & \cdots & y_p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_{N-(p+1)} & y_{N-p} & \cdots & y_{N-2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_p \\ y_2 & x_3 & \cdots & y_{p+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_{N-p} & y_{N-(p-1)} & \cdots & y_{N-1} \end{pmatrix} \quad (21)$$

On peut alors décomposer ces matrices de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_l \mathbf{H} \mathbf{Z}_r \\ \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Z}_l \mathbf{H} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_r \end{cases} \quad (22)$$

Avec :

$$\mathbf{Z}_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_K \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-p-1} & z_2^{N-p-1} & \cdots & z_K^{N-p-1} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{Z}_r = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{p-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{p-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & z_K & \cdots & z_K^{p-1} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{H} = \text{diag}(d_1, \dots, d_K) \quad (25)$$

$$\mathbf{Z} = \text{diag}(z_1, \dots, z_K) \quad (26)$$

On remarque alors que,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{Y}_1 - \lambda \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_l \mathbf{H} (\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{I}_d) \mathbf{Z}_r \quad (27)$$

La valeur  $\lambda$  est alors une valeur propre généralisée de la paire de matrices  $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_0)$  ssi

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{Y}_0 \mathbf{v} \quad (28)$$

$$\iff (\mathbf{Y}_1 - \lambda \mathbf{Y}_0) \mathbf{v} = 0 \quad (29)$$

$$\iff \text{la valeur } \lambda \text{ diminue le rang de la matrice } \mathbf{Z} - \mathbf{I}_d \quad (30)$$

$$\iff \lambda = z_i, \quad 0 \leq i < N \quad (31)$$

Ainsi, trouver les  $z_i$  se réduit donc à trouver ces valeurs propres généralisées. Pour cela, on se réduit à un calcul usuel de valeurs propres en prémultipliant l'équation (29) par la pseudo-inverse de  $\mathbf{Y}_1$  :

$$\mathbf{Y}_1^+ (\mathbf{Y}_1 - z_i \mathbf{Y}_0) \mathbf{v} = 0 \quad (32)$$

$$\iff \mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_1 \mathbf{v} - z_i \mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_0 \mathbf{v} = 0 \quad (33)$$

$$\iff \mathbf{v} - z_i \mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_0 \mathbf{v} = 0 \quad (34)$$

$$\iff z_i \mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_0 \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad (35)$$

$$\iff \mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_0 \mathbf{v} = \frac{1}{z_i} \mathbf{v} \quad (36)$$

Le calcul de  $\mathbf{Y}_1^+$  peut être effectué à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}_1^+ = \mathbf{V}\mathbf{S}^+\mathbf{U}^*$$

Travaillant sur des données  $\mathbf{Y}_i$  bruitées, on peut réduire l'impact du bruit sur le calcul des fréquences en ne considérant que les  $K$  plus grandes valeurs propres issues de la décomposition en valeurs singulières. En effet, dans le cas d'un signal non bruité, la matrice  $\mathbf{Y}_1$  contient alors exactement  $K$  valeurs singulières non nulles. Ainsi on fera les calculs précédents avec  $\widetilde{\mathbf{Y}}_1$  tel que :

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{U}_K \mathbf{S}_{K \times K} \mathbf{V}_K^* \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{\mathbf{Y}}_1^+ = \mathbf{V}_K \mathbf{S}_{K \times K}^{-1} \mathbf{U}_K^* \quad (38)$$

Où la matrice  $\mathbf{S}_{K \times K}$  désigne la matrice extraite de  $\mathbf{S}$  ne contenant que les  $K$  plus grandes valeurs singulières (les autres étant dues au bruit et inférieures à un  $\epsilon$  donné). De même les matrices  $\mathbf{U}_K$  et  $\mathbf{V}_K$  ne contiennent alors que les  $K$  vecteurs propres dominants associés aux  $K$  plus grandes valeurs propres.

En trouvant les valeurs propres  $\lambda'_i$  associées à la matrice  $\mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_0$  on obtient alors fréquences recherchées,  $\forall i \in \llbracket 1, K \rrbracket$  :

$$\lambda'_i = \frac{1}{z_i} \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow z_i = \frac{1}{\lambda'_i} \quad (40)$$

Ainsi, la méthode de Matrix Pencil se résume à :

---

Construction des matrices  $\mathbf{Y}_0$  et  $\mathbf{Y}_1$ .

Effectuer une décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{Y}_1$  en ne gardant que les  $K$  valeurs propres dominantes.

Calcul de l'inverse de Penrose  $\mathbf{Y}_1^+$  de  $\mathbf{Y}_1$  à l'aide de la décomposition précédente.

Recherche des valeurs propres  $\lambda'_i$  de la matrice  $\mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_0$ .

Les fréquences recherchées sont les  $z_i = \frac{1}{\lambda'_i}$ .

---

## 3 Méthodes d'estimation spectrale à partir de la fonction d'autocorrélation

### 3.1 Méthode de Yule–Walker

La première modification notoire de la méthode de Prony fut développée dans le papier (YULE, 1927) suivi de (WALKER, 1931), qui fut motivé par la recherche de période dans le nombre de tâches solaires. Leur méthode est en tout point similaire à celle de Prony, à ceci près qu'ils calculent un modèle autorégressif à partir des mesures d'autocorrélations et non des

mesures directes  $y_i$ .

Le point de départ de la méthode de Yule-Walker est le produit de convolution de Prony. Étant donné un signal  $(x_n)_{n=0\dots N-1}$ , on a :

$$\sum_{j=0}^K h_j x_{m-j} = 0, \quad \forall m = K \dots N-1 \quad (41)$$

On peut supposer  $h_0 \neq 0$ . En effet, dans le cas contraire, on voit que 0 est racine évidente du polynôme formé par les  $h_k$ , et donc on peut prendre un rang  $K$  inférieur pour ne pas avoir d'exponentielle complexe d'amplitude nulle. Ainsi, en divisant le tout par  $h_0$ , on obtient le modèle autorégressif suivant :

$$\forall m = K \dots N-1 \quad x_m = - \sum_{j=1}^K \alpha_j x_{m-j}, \quad \alpha_j = \frac{h_j}{h_0} \quad (42)$$

En convenant  $\alpha_0 = 1$ , on remarque que les racines du polynôme  $\sum_{j=0}^K \alpha_j z^j$  sont toujours les  $(\bar{z}_k)_{k=1\dots K}$  définis précédemment. Il nous suffit alors de trouver les  $(\alpha_j)_{j=1\dots K}$  pour retrouver les différentes phases du signal.

A partir du modèle précédent, on construit un problème de minimisation de la manière suivante :

$$\rho = \liminf_{\alpha} \left( \sum_{n=K}^{N-1} \left| x_n + \sum_{k=1}^K \alpha_k x_{n-k} \right|^2 \right) \quad (43)$$

Or, l'application  $\alpha \rightarrow \sum_{n=K}^{N-1} \left| x_n + \sum_{k=1}^K \alpha_k x_{n-k} \right|^2$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{C}^K$ , et pour tout  $k = 1 \dots K$ , on a  $\sum_{n=K}^{N-1} \left| x_n + \sum_{k=1}^K \alpha_k x_{n-k} \right|^2 \xrightarrow{\alpha_i \rightarrow +\infty} +\infty$ , on en déduit alors que le minimum est atteint lorsque  $\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_k} = 0$ ,  $k = 1 \dots K$ .

Commençons par développer cette somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=K}^{N-1} \left| x_n + \sum_{j=1}^K \alpha_j x_{n-j} \right|^2 &= \sum_{n=K}^{N-1} \left( x_n + \sum_{j=1}^K \alpha_j x_{n-j} \right) \left( \bar{x}_n + \sum_{l=1}^K \bar{\alpha}_l \bar{x}_{n-l} \right) \\ &= \sum_{n=K}^{N-1} |x_n|^2 + \sum_{j=1}^K \left[ \alpha_j \left( \sum_{n=K}^{N-1} x_{n-j} \bar{x}_n \right) + \bar{\alpha}_j \left( \sum_{n=K}^{N-1} \bar{x}_{n-j} x_n \right) \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j \bar{\alpha}_l \left( \sum_{n=K}^{N-1} x_{n-j} \bar{x}_{n-l} \right) \end{aligned}$$

Notons  $r_{xx}(j, l) = \sum_{n=K}^{N-1} x_{n-j} \bar{x}_{n-l}$ , l'équation de minimisation se réécrit alors

$$\rho = \liminf_{\alpha} \left( r_{xx}(0, 0) + \sum_{j=1}^K \left( \alpha_j r_{xx}(j, 0) + \bar{\alpha}_j r_{xx}(0, j) \right) + \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j \bar{\alpha}_l r_{xx}(j, l) \right) \quad (44)$$

Pour le calcul du minimum, on va regarder pour tout  $k = 1 \dots K$  à quelle condition la dérivée partielle s'annule.  $\alpha_k$  étant complexe, on va d'abord procéder à la dérivée partielle par rapport

à la partie réelle de  $\alpha_k$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \operatorname{Re}\{\alpha_k\}} &= r_{xx}(k, 0) + r_{xx}(0, k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K \overline{\alpha_l} r_{xx}(k, l) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \alpha_j r_{xx}(j, k) + (\alpha_k + \overline{\alpha_k}) r_{xx}(k, k) \\ &= r_{xx}(k, 0) + r_{xx}(0, k) + \sum_{l=1}^K \overline{\alpha_l} r_{xx}(k, l) + \sum_{j=1}^K \alpha_j r_{xx}(j, k) \end{aligned}$$

Or,

$$r_{xx}(j, l) = \sum_n x_{n-j} \overline{x_{n-l}} = \overline{\sum_n x_{n-l} x_{n-j}} = \overline{r_{xx}(l, j)} \quad (45)$$

On obtient donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial \operatorname{Re}\{\alpha_k\}} = 2 \left[ \operatorname{Re}\{r_{xx}(0, k)\} + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^K \alpha_j r_{xx}(j, k) \right\} \right]$$

De la même manière avec la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\partial \rho}{\partial \operatorname{Im}\{\alpha_k\}} &= \overline{r_{xx}(0, k)} - r_{xx}(0, k) + \sum_{l=1}^K \overline{\alpha_l} r_{xx}(k, l) - \sum_{j=1}^K \alpha_j r_{xx}(j, k) \\ &= -2i \left[ \operatorname{Im}\{r_{xx}(0, k)\} + \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^K \alpha_j r_{xx}(j, k) \right\} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les deux résultats précédents :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (46)$$

$$\iff \frac{\partial \rho}{\partial \operatorname{Re}\{\alpha_k\}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \operatorname{Im}\{\alpha_k\}} = 0 \quad (47)$$

$$\iff r_{xx}(0, k) + \sum_{j=1}^K \alpha_j r_{xx}(j, k) = 0 \quad (48)$$

Ceci étant vrai pour tout  $k = 1 \dots K$ , le minimum vérifie le système :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(1, 1) & r_{xx}(2, 1) & \cdots & r_{xx}(K, 1) \\ r_{xx}(1, 2) & r_{xx}(2, 2) & \cdots & r_{xx}(K, 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(1, K) & r_{xx}(2, K) & \cdots & r_{xx}(K, K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}(0, 1) \\ r_{xx}(0, 2) \\ \vdots \\ r_{xx}(0, K) \end{pmatrix} \quad (49)$$

La matrice obtenue est hermitienne, et avec une simple inversion matricielle, on obtient les coefficients  $(\alpha_i)_{i=0 \dots K}$ , toujours en convenant  $\alpha_0 = 0$ . En calculant les racines du polynôme formé par ces coefficients, on trouve alors  $(\overline{z_i})_{i=1 \dots K}$ , et donc pour tout  $i = 1 \dots K$ ,  $\omega_i = \arg \overline{z_i}$ .

Ainsi, l'algorithme de Yule-Walker comprend les étapes suivantes :

---

Construction de la matrice de Yule–Walker à partir des données.

Calcule ces coefficients  $\{\alpha_k\}_{k=1\dots K}$  à partir du système matriciel.

Calcule des racines du polynome formé par  $\{\alpha_k\}_{k=1\dots K}$ , on obtient alors les exponentielles complexes  $\{e^{iw_k}\}_{k=1\dots K}$ .

---

## 3.2 Méthode de Pisarenko

### 3.2.1 Principe de la méthode

La méthode de Pisarenko, inventée par V.F Pisarenko en 1973, repose sur une idée assez simple : Il s'agit de filtrer le bruit de notre signal avant d'en extraire les fréquences. Pour cela, cette méthode utilise la matrice d'autocorrélation du signal.

Soit  $(\mathbf{x}[n])_{n=0..N+1}$  un signal échantillonné. Sa matrice d'autocorrélation est défini de la manière suivante :

$$(\mathbf{R}_x)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} r_x(i-j)$$

$$r_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^*[n-k])$$

Avec  $\mathbb{E}$  l'espérance mathématique et "\*" la transposée hermitienne (transposée conjuguée). Supposons maintenant que nous disposons d'un signal mono fréquentiel perturbé par un bruit gaussien :

$$x[n] = A_1 e^{j\omega_1 n} + Z[n]$$

On peut alors réécrire nos coefficients  $r_x$  de la manière suivante :

$$r_x[k] = |A_1| e^{j\omega_1 k} + \sigma_0^2 \delta_{k,0}$$

En effet :

$$\begin{aligned} r_x[k] &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(x[n]x^*[n-k]) \\ &= \mathbb{E}(|A_1| e^{j\omega_1 k} + Z[n]) \times \mathbb{E}(|A_1| e^{-j\omega_1(n-k)} + Z[n-k]) \\ &= \mathbb{E}(|A_1|^2 e^{j\omega_1 k}) + \mathbb{E}(Z[n]|A_1| e^{-j\omega_1(n-k)}) + \mathbb{E}(Z[n-k]|A_1| e^{j\omega_1 n}) + \mathbb{E}(Z[n]Z[n-k]) \end{aligned}$$

Le bruit et notre signal étant décorrélés, le deuxième et le troisième terme de notre somme sont nuls. De plus, par définition d'un bruit gaussien (bruit dont les réalisations sont décorrélées), le quatrième terme est non nul si et seulement si  $n-k = n \Leftrightarrow k = 0$  et il vaut  $\sigma_0^2$ , l'espérance du bruit. L'expression correspondant au premier terme,  $|A_1|^2 e^{j\omega_1 k}$ , étant déterministe, on obtient :

$$r_x[k] = |A_1|^2 e^{j\omega_1 k} + \sigma_0^2 \delta_{k,0}$$

Comme  $(\mathbf{R}_x)_{ij} = r_x(i-j)$ , on peut réécrire notre relation sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbf{R}_{\text{signal}} + \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad (\mathbf{R}_{\text{signal}})_{ij} = |A_1|^2 e^{j\omega_1(i-j)} \\ &= |A_1|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_1 = (1, e^{j\omega_1}, e^{2j\omega_1}, \dots, e^{(M-1)j\omega_1})^T \end{aligned}$$

Avec  $M$  le nombre d'échantillons de notre signal. En effet, pour les coefficients de la matrice d'autocorrélation,  $k = i-j$ . Donc  $k = 0 \Leftrightarrow i = j$  d'où le terme  $\sigma_0^2 \mathbf{I}$  avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Il est alors facile de généraliser ce raisonnement avec un signal composé de  $K$  fréquences,  $K \geq 1$  :

$$r_x[n] = \sum_{k=1}^K |A_k|^2 e^{j\omega_k n} + \delta_{n,0} \sigma_0^2 \quad (50)$$

De même, on peut réécrire cette équation sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}_{signal} = \sum_{k=1}^K |A_k|^2 e_k e_k^* + \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (51)$$

avec

$$e_k = (1, e^{jw_k}, e^{2jw_k}, \dots, e^{(M-1)jw_k})^T \quad (52)$$

Avec  $M$  le nombre d'échantillons de notre signal. L'idée de Pisarenko fut alors de réduire la dimension de notre matrice d'autocorrélation en prenant  $M = K + 1$  ( $M$  n'est donc plus forcément égal à notre nombre d'échantillons) avec  $K$  le nombre de fréquence de notre signal.  $K$  correspond alors à la dimension de l'espace propre de notre signal et 1 à celle de l'espace propre du bruit.

D'après le théorème de Carathéodory, notre matrice d'autocorrélation admet une unique valeur propre associée au bruit (la présence de bruit augmente de 1 la dimension de la matrice d'autocorrélation et fait donc apparaître une valeur propre supplémentaire.). Notons la  $\lambda_n$  et notons  $u_n$  un vecteur propre associé.

Toujours d'après le théorème de Caratheodory, on a la propriété suivante :

$$u_n \perp u_{signal} \Leftrightarrow \text{Le vecteur propre du bruit annule les composantes du signal}$$

On retrouve ainsi le filtre annulateur de la méthode de Prony :

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^K u_n[k] z^{-k} \stackrel{\text{Annule composantes}}{=} \prod_{k=1}^K (1 - e^{jw_k} z^{-1}) \quad (53)$$

Il nous reste donc à trouver le vecteur propre associé au bruit. Pour cela, il suffit de remarquer que l'on peut réécrire notre matrice d'autocorrélation sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^* + \sigma_0 \mathbf{I} \quad (54)$$

Avec :

$$\mathbf{E} = (e_1, e_2, \dots, e_k) \quad (55)$$

De dimension  $M \times K$  (on complète avec le vecteur propre associé au bruit pour avoir une dimension  $M \times M$ ).

Et :

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(|A_1|^2, \dots, |A_K|^2, 0) \text{ De dimension } M \times M \quad (56)$$

Ainsi, la valeur propre associée au bruit est nulle. On recherchera donc la valeur propre minimale de notre matrice (dans le cas expérimental, on aura rarement la valeur propre associée au bruit exactement égale à 0). Puis on formera le polynôme annulateur avec le vecteur propre associé. Les fréquences seront alors les arguments des racines de ce polynôme.

### 3.2.2 Mise en œuvre

Dans les cas réels, nous ne possédons qu'une « réalisation » de notre signal. Nous considérons donc à la place la matrice d'autocorrélation la matrice suivante (([STOICA et collab., 2005](#), Chap. 2)) :

$$\hat{\mathbf{R}} = \{\hat{\mathbf{r}}(p - q)\}_{0 \leq p, q \leq m}, \quad (57)$$

en prenant  $m = K$  le nombre d'exponentielles de notre signal, donc  $\hat{\mathbf{R}}$  de taille  $M = 2K + 1$ , avec :

$$\hat{r}(\ell) = \frac{1}{M} \sum_{t=\ell+1}^M \mathbf{y}(t) \mathbf{y}^*(t - \ell) \approx \mathbb{E}[\mathbf{y}(t) \mathbf{y}^*(t - \ell)] = r(\ell). \quad (58)$$

On a ainsi une formule explicite de notre estimateur de la matrice de covariance. Cependant, ce dernier étant biaisé, on préférera utiliser l'estimateur suivant :

$$\hat{r}(\ell) = \frac{1}{M - \ell} \sum_{t=\ell+1}^M \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^*(t - \ell), \quad (59)$$

les indices négatifs étant donnés par  $\hat{r}(-\ell) = \hat{r}^*(\ell)$ .

Ainsi, on pourra utiliser l'algorithme suivant :

---

Calcul d'une estimation de la matrice de corrélation  $\tilde{\mathbf{R}}_{yy}$  d'ordre  $K + 1$  à partir des données.

Recherche du vecteur propre  $\mathbf{v}_{K+1}$  correspondant à la plus petite valeur propre.

Recherche des racines du polynôme formé à partir de  $\mathbf{v}_{K+1}$ .

Estimation des puissances des exponentielles à partir des racines.

---

### 3.3 Méthode Root-MUSIC

La méthode MUSIC (pour Multiple Signal Classification) est une généralisation de la méthode de Pisarenko : On ne considère pas seulement un seul sous-espace du bruit mais l'ensemble de ces derniers.

Ainsi, notre matrice de corrélation a une dimension maximum de  $N \times N$  (avec  $N$  la taille de notre signal) et l'on considérera les  $N - p$  plus petites valeurs propres (avec  $p$ , nombre d'exponentielles de notre signal).

On recherche alors les racines de chacun des polynômes associés aux  $N - p$  plus petites valeurs propres. Comme ces polynômes sont de degré supérieur à  $p$ , il faut en extraire les  $p$  plus petites racines (en module). En moyennant ces  $p$  racines pour tous les polynômes, on obtient une méthode plus robuste face au bruit que la méthode de Pisarenko.

### 3.4 Méthode ESPRIT

On considère en entrée le signal échantillonné bruité suivant :

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n) + \mathbf{b}(n) = \sum_{k=1}^K d_k e^{-i\omega_k n} + \mathbf{b}(n) \quad \forall n = 0, \dots, N - 1 \quad (60)$$

Avec  $K$  le nombre d'exponentielles complexes qui composent notre signal et  $\mathbf{b}(n)$  un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ .

De la même manière que Pisarenko et Music, on considère la matrice d'autocorrélation d'ordre  $N$  :

$$\mathbf{R}_{yy}^N = \begin{pmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) & \dots & r_{yy}(-N + 1) \\ r_{yy}(1) & r_{yy}(0) & \dots & r_{yy}(-N + 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(N - 1) & r_{yy}(N - 2) & \dots & r_{yy}(0) \end{pmatrix} \quad (61)$$

Avec  $r_{yy}$  la fonction de corrélation définie par  $r_{yy}(m) = \text{E}[y^*(n)y(n + m)]$ .

En supposant que le bruit est blanc et indépendant du signal, on a :

$$\begin{aligned}
r_{yy}(m) &= \mathbb{E}[\mathbf{y}^*(n)\mathbf{y}(n+m)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{x}^*(n)\mathbf{x}(n+m)] + \mathbb{E}[\mathbf{x}^*(n)\mathbf{b}(n+m)] + \mathbb{E}[\mathbf{b}^*(n)\mathbf{x}(n+m)] + \mathbb{E}[\mathbf{b}^*(n)\mathbf{b}(n+m)] \\
&= r_{xx}(m) + \mathbb{E}[\mathbf{x}^*(n)]\mathbb{E}[\mathbf{b}(n+m)] + \mathbb{E}[\mathbf{b}^*(n)]\mathbb{E}[\mathbf{x}(n+m)] + \sigma^2\delta(m) \\
&= r_{xx}(m) + \sigma^2\delta(m)
\end{aligned}$$

Développons l'expression  $r_{xx}(m)$  :

$$\begin{aligned}
r_{xx}(m) &= \mathbb{E}[\mathbf{y}^*(n)\mathbf{y}(n+m)] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K d_k^* d_l e^{iw_k n} e^{-iw_l(n+m)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^K e^{-iw_l m} \left(\sum_{k=1}^K d_k^* d_l e^{i(w_k-w_l)n}\right)\right] \\
&= \sum_{l=1}^K e^{-iw_l m} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^K d_k^* d_l e^{i(w_k-w_l)n}\right] \\
&= \sum_{l=1}^K e^{-iw_l m} \left(\|d_l\|^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^K d_k^* d_l \mathbb{E}[e^{i(w_k-w_l)n}]\right)
\end{aligned}$$

Il nous reste alors à montrer que  $\mathbb{E}[e^{i(w_k-w_l)n}] = 0$ , pour tout  $k \neq l$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i(w_k-w_l)n}] &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(w_k-w_l)n} \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \frac{1 - e^{i(w_k-w_l)N}}{1 - e^{i(w_k-w_l)}}, \quad k \neq l
\end{aligned}$$

Et

$$\left\| \frac{1}{N} \frac{1 - e^{i(w_k-w_l)N}}{1 - e^{i(w_k-w_l)}} \right\| \leq \frac{2}{N \|1 - e^{i(w_k-w_l)}\|}$$

On en déduit  $\mathbb{E}[e^{i(w_k-w_l)n}] = 0$ ,  $k \neq l$ , et donc  $r_{yy}(m) = \sum_{l=1}^K \|d_l\|^2 e^{-iw_l m} + \sigma^2 \delta(m)$ . On peut donc écrire :

$$\mathbf{R}_{yy}^N = \mathbf{R}_{xx}^N + \mathbf{R}_{bb}^N = \sum_{k=1}^K \|d_k\|^2 \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^* + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (62)$$

avec  $\mathbf{s}_k = (1, e^{-iw_k}, e^{-i2w_k}, \dots, e^{-iNw_k})^T$ .  $\mathbf{s}_k$  est appelé vecteur signal.

Ainsi, la matrice de corrélation s'écrit comme la somme d'une matrice "signal" et la somme d'une matrice "bruit". La matrice signal est de rang  $K$ , on peut alors la décomposer en vecteurs et valeurs propres :

$$\mathbf{R}_{xx}^N = \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* = \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* \quad (63)$$

avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ , et  $\forall k = K+1 \dots N$ ,  $\lambda_k = 0$ . Les vecteurs  $\mathbf{v}_k$  constituent une base orthonormée, et on peut montrer que les vecteurs  $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_K$  engendrent le même espace

que les vecteurs signaux  $\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_K$ . Quant aux vecteurs  $\mathbf{v}_K \dots \mathbf{v}_N$ , ils engendrent le sous-espace bruit.

On a :

$$\mathbf{R}_{yy}^N = \mathbf{R}_{xx}^N + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (64)$$

$$= \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* + \sigma^2 \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* \quad (65)$$

$$= \sum_{k=1}^K (\lambda_k + \sigma^2) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* + \sigma^2 \sum_{k=K+1}^N \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* \quad (66)$$

Une propriété importante est que les vecteurs signaux engendrent le même espace que les vecteurs propres principaux de la matrice de corrélation, et ils sont orthogonaux aux vecteurs du sous-espace bruit :

$$\mathbf{s}_i^* \left( \sum_{k=K+1}^N \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = 0 \quad (67)$$

D'après les équations précédentes, on a :

$$\mathbf{R}_{yy}^N = \sum_{k=1}^K (\lambda_k + \sigma^2) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* + \sigma^2 \sum_{k=K+1}^N \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* \quad (68)$$

$$= \mathbf{V} \tilde{\Lambda} \mathbf{V}^* + \mathbf{G} \Sigma \mathbf{G}^* \quad (69)$$

où  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K]$  désigne la matrice des vecteurs propres du sous-espace signal. De même avec la base des vecteurs signaux, on obtient :

$$\mathbf{R}_{yy}^N = \mathbf{S} \mathbf{\Pi} \mathbf{S}^* + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (70)$$

avec  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_K]$  et  $\mathbf{\Pi} = \text{diag}(\|\mathbf{d}_1\|^2, \dots, \|\mathbf{d}_K\|^2)$ .

On définit à présent  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  de la manière suivante :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-iw_1} & e^{-iw_2} & \dots & e^{-iw_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i(N-1)w_1} & e^{-i(N-1)w_2} & \dots & e^{-i(N-1)w_K} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} - \\ \mathbf{S}_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ - \end{pmatrix} \quad (71)$$

On voit alors le lien de rotation entre  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$ . On définit  $\Phi$  qui peut être vu comme un opérateur de rotation :

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \Phi = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} e^{-iw_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-iw_K} \end{pmatrix} \quad (72)$$

De la même manière, on décompose  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{V} \triangleq \begin{pmatrix} - \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ - \end{pmatrix} \quad (73)$$

On va montrer qu'une relation existe aussi entre  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  :

$$\mathbf{R}_{yy}^N \mathbf{V} = \mathbf{V} \tilde{\Lambda} \quad (74)$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} \mathbf{\Pi} \mathbf{S}^* \mathbf{V} + \sigma^2 \mathbf{V} = \mathbf{V} \tilde{\Lambda} \quad (75)$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} \mathbf{\Pi} \mathbf{S}^* \mathbf{V} = \mathbf{V} (\tilde{\Lambda} - \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (76)$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{S} \mathbf{C} \quad (77)$$

$$(78)$$

avec  $\mathbf{C} = \mathbf{\Pi}\mathbf{S}^*\mathbf{V}(\tilde{\lambda} - \sigma^2\mathbf{I})^{-1}$ . Ainsi, avec l'équation précédente on a :

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}_2\mathbf{C} \quad (79)$$

$$= \mathbf{S}_1\mathbf{\Phi}\mathbf{C} \quad (80)$$

$$= \mathbf{V}_1\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{C} \quad (81)$$

$$= \mathbf{V}_1\mathbf{\Psi} \quad (82)$$

$$(83)$$

Les matrices  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont donc reliées par la relation précédente avec  $\mathbf{\Psi} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{C}$ . On voit alors que  $\mathbf{\Phi}$  et  $\mathbf{\Psi}$  sont similaires, c'est-à-dire qu'elles partagent les mêmes valeurs propres. Or, la matrice  $\mathbf{\Phi}$  est la matrice diagonale d'éléments diagonaux les  $e^{-i\omega_k}$ . Un calcul des valeurs propres de  $\mathbf{\Psi}$  nous permet alors de récupérer les différentes pulsations qui composent notre signal.

En pratique, la matrice de corrélation est estimée, on obtient alors seulement des estimées  $\tilde{\mathbf{V}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{V}}_2$ . On résout alors au sens des moindres carrés le système suivant :

$$\tilde{\mathbf{V}}_2 = \tilde{\mathbf{V}}_1\tilde{\mathbf{\Psi}} \quad (84)$$

La méthode Esprit se résume aux étapes suivantes :

---

Estimation de la matrice  $\tilde{\mathbf{R}}_{yy}$  à partir de données bruitées.

Décomposition en vecteurs propres et formation du sous espace signal  $\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_K]$ .

Formation de  $\tilde{\mathbf{V}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}_2$  et résolution de  $\tilde{\mathbf{V}}_2 = \tilde{\mathbf{V}}_1\tilde{\mathbf{\Psi}}$ .

Recherche des valeurs propres  $\{e^{-i\omega_1}\}_{i=1\dots K}$  de  $\tilde{\mathbf{\Psi}}$ .

---

## 4 Comparaison des méthodes

### 4.1 Borne de Cramer-Rao

Lors de l'analyse de notre signal, la borne de Cramer-Rao nous fournit une borne inférieure sur l'erreur commise lors de l'extraction des fréquences.

Le signal que nous recevons est le suivant :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{g} = f(\hat{\boldsymbol{\omega}}) + \mathbf{g}$$

Avec  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  le vecteur composé des vraies fréquences de notre signal et  $\mathbf{g}$  un vecteur de bruit gaussien suivant la loi normale  $N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2)$ . Pour un vecteur, l'expression de cette loi est la suivante :

$$P(\mathbf{g} = \mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi^n \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi^n \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2}$$

Avec  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matrice de covariance de notre vecteur. On peut alors calculer la fonction de vraisemblance  $L(\boldsymbol{\omega})$ .

$$L(\boldsymbol{\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tilde{\mathbf{y}}|\boldsymbol{\omega}) = P(\tilde{\mathbf{y}}|f(\boldsymbol{\omega})) = P(\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{y}} - f(\boldsymbol{\omega})) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - f(\boldsymbol{\omega})\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2}$$

On cherche à calculer l'information de Fisher  $I(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} \ln(L(\boldsymbol{\omega}))$ . Pour cela, nous devons calculer la différentielle de l'expression suivante :  $\|\tilde{\mathbf{y}} - f(\boldsymbol{\omega})\|_{\Sigma}^2$ .

Posons alors  $H = \frac{1}{2} \|\cdot\|_{\Sigma} \circ (f(\boldsymbol{\omega}) - \tilde{\mathbf{y}}) = N \circ f_1$ .

$$\begin{aligned} (DH)_{\omega}(k) &= \frac{1}{2} (DN)_{f_1(\omega)} \circ (Df_1)_{\omega}(k) \\ &= \langle f(\boldsymbol{\omega}) - \tilde{\mathbf{y}}, (Df_1)_{\omega}(k) \rangle_{\Sigma} \end{aligned}$$

On note  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega})$  la matrice jacobienne de  $f$  en  $\boldsymbol{\omega}$ . En utilisant les deux propriétés suivantes :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\Sigma} = \mathbf{x}^* \Sigma^{-1} \mathbf{y} = \left( \Sigma^{-\frac{1}{2}*} \mathbf{x} \right)^* \left( \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right) = \langle \Sigma^{-\frac{1}{2}*} \mathbf{x}, \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \rangle_2 \quad (85)$$

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 = \mathbf{x}^* \mathbf{A}^* \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^* \mathbf{y} \rangle_2 \quad (86)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (DH)_{\omega}(k) &= 2 \langle \Sigma^{-\frac{1}{2}*} (f(\boldsymbol{\omega}) - \tilde{\mathbf{y}}), \Sigma^{-\frac{1}{2}} F(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{k} \rangle_2 \\ &= 2 \langle (\Sigma^{-\frac{1}{2}} F(\boldsymbol{\omega}))^* (\Sigma^{-\frac{1}{2}*}) (f(\boldsymbol{\omega}) - \tilde{\mathbf{y}}), \mathbf{k} \rangle_2 \end{aligned}$$

Ainsi, par définition de la différentielle, le premier terme de notre produit scalaire correspond au gradient de  $H$ . On peut alors calculer l'information de Fischer :

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\omega}) &= \mathbb{E}(\nabla H \times \nabla H^*) \\ &= F(\boldsymbol{\omega})^* \Sigma^{-\frac{1}{2}*} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E}((f(\boldsymbol{\omega}) - \tilde{\mathbf{y}})(f(\boldsymbol{\omega}) - \tilde{\mathbf{y}})^*) \Sigma^{-1} F(\boldsymbol{\omega}) \\ &= F(\boldsymbol{\omega})^* \Sigma^{-1*} \Sigma \Sigma^{-1} F(\boldsymbol{\omega}) \\ &= F(\boldsymbol{\omega})^* \Sigma^{-1*} F(\boldsymbol{\omega}) \\ &= F(\boldsymbol{\omega})^* \Sigma^{-1} F(\boldsymbol{\omega}) \end{aligned}$$

On peut alors calculer notre borne de Cramer-Rao qui est égale à  $I(\boldsymbol{\omega})^{-1}$ . Ainsi, on a l'inégalité suivante (inégalité coefficients à coefficients) :

$$\mathbb{E}((\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}})(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}})^*) \geq I(\boldsymbol{\omega})^{-1}$$

Avec  $\boldsymbol{\omega}$  notre vecteur des fréquences exactes et  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  notre vecteur des fréquences calculées.

Cependant, seules les différences entre  $\omega_i$  et  $\tilde{\omega}_i$  nous intéressent (on ne considère pas les différences croisées qui n'ont pas de sens physique). Ainsi, pour obtenir notre borne, on considérera la trace de  $I(\boldsymbol{\omega})^{-1}$  qui correspond à la somme des erreurs sur chacune des fréquences.

## 4.2 Méthodologie

Afin de comparer les différentes méthodes entre elles, nous utilisons la borne de Cramer-Rao tracée en fonction du SNR. Le SNR (Signal to Noise Ratio) permet de quantifier la quantité de bruit présente dans notre signal. Plus ce dernier est élevé, plus la part du signal réel au sein du signal bruité est importante. Le SNR est donc inversement proportionnel au niveau de bruit de notre signal.

Comme nous l'avons vu précédemment, la borne de Cramer-Rao permet de quantifier l'erreur minimale que l'on peut atteindre sur les fréquences. Cette dernière dépendant de la matrice de covariance du bruit, il est possible de la tracer en fonction du SNR. Ainsi, pour chaque niveau de SNR, nous traçons notre borne de Cramer-Rao et l'erreur de chaque méthode moyennée sur

20 itérations.

Ainsi, pour tester l'efficacité de nos méthodes, nous avons tracé l'erreur obtenue en fonction du SNR du signal en nous plaçant dans différents cas (espacement des fréquences différent, amplitudes relatives des fréquences différentes,...). Pour nos tests, nous avons modélisé le bruit par un bruit gaussien s'ajoutant à notre vecteur de base de la manière suivante :

$$SignalBruité = Signal + EcartTypeBruit^2 * randn(1, N)$$

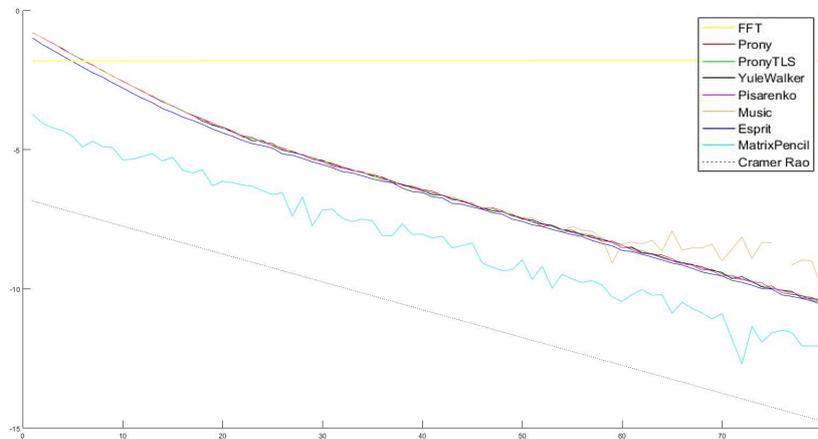
L'écart type du bruit désiré étant obtenu pour chaque valeur de SNR par la formule suivante :

$$EcartTypeBruit = \frac{AmplitudeSignal}{10^{\frac{SNR}{20}}}$$

### 4.2.1 Retour sur l'utilisation de la FFT

Dans un premier temps nous avons étudié les résultats obtenus par transformée de Fourier discrète (FFT). Cela nous a permis de prendre conscience de l'importance de s'affranchir de la grille de discrétisation.

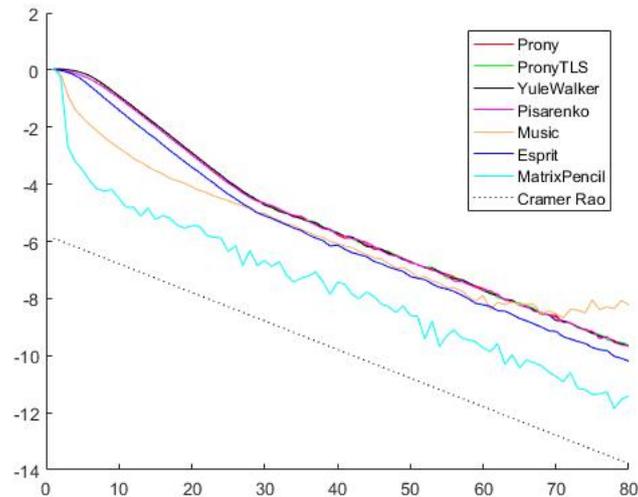
Ainsi, on peut observer sur la figure suivante que pour un signal composé d'une unique fréquence ( $\omega_1 = 1.5$ ,  $a_1 = 1.0$ ), l'erreur effectuée par la FFT est constante quel que soit le SNR considéré. Cela montre alors que l'on commet bien une erreur due à la discrétisation de notre espace des fréquences. De plus, sa constance indique que, bien que le bruit puisse être élevé (faibles SNR), l'erreur due à la discrétisation est toujours l'erreur prédominante (on reste sur la même valeur de la grille de discrétisation) :



Le résultat est identique avec plusieurs fréquences ( $\omega = \{0.5; 3.05; 2.0\}$  d'amplitude  $A = \{1.0; 1.0; 1.0\}$ ), hormis un saut visible, ce dernier étant dû au changement d'une valeur de discrétisation vers une autre pour une des fréquences :

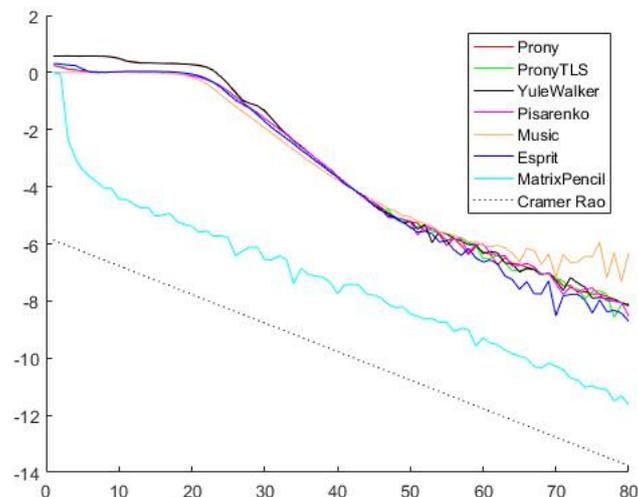
### 4.2.2 Espacement des fréquences

Dans un premier temps nous avons testé le signal composé des fréquences  $\omega = \{1.0; 2.0; 3.0\}$  d'amplitude  $A = \{1.0; 1.0; 1.0\}$ .



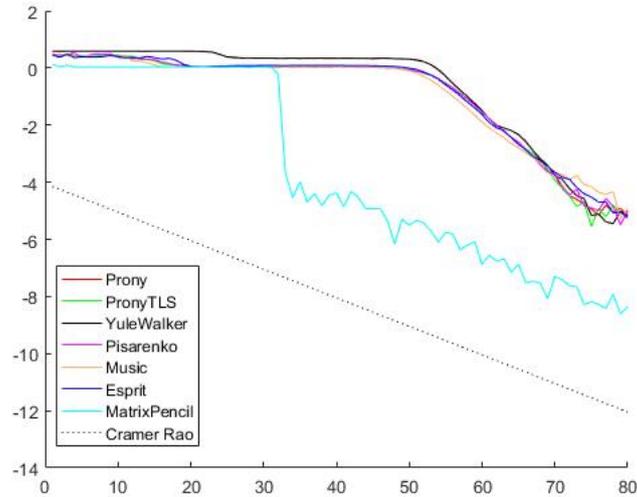
On remarque que même avec un signal sans fréquences proches et d'amplitudes égales, les méthodes ont déjà des performances très différentes. Ainsi, Matrix-Pencil est bien plus proche de la borne théorique de Cramer-Rao que les autres méthodes. En outre, Esprit et Root-Music semblent être un peu meilleures même si Root-Music, implémentée au sein de Matlab, n'est pas très précise sur des signaux peu bruités (SNR grand).

Par la suite, nous avons testé le signal composé des fréquences  $\omega = \{1.0; 1.0; 1.2\}$  d'amplitude  $A = \{1.0; 1.0; 1.0\}$ .



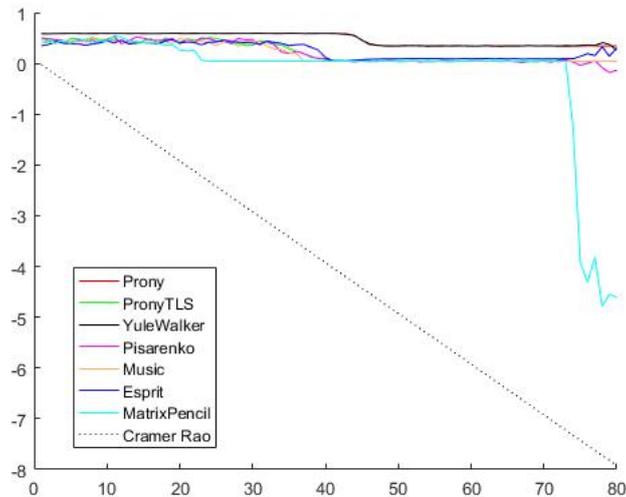
Avec des fréquences moins espacées, on observe une baisse des performances pour toutes les méthodes. Néanmoins, La méthode Matrix-Pencil est de nouveau bien supérieure aux autres. La méthode Root-Music de Matlab est encore entachée d'une erreur significative pour les signaux peu bruités.

Par la suite, nous avons testé le signal composé des fréquences  $\omega = \{1.09; 1.1; 1.11\}$  d'amplitude  $A = \{1.0; 1.0; 1.0\}$ .



La baisse des performances est ici encore plus visible (on s'éloigne encore plus de la borne de Cramer-Rao). Seule la méthode Matrix-Pencil parvient de nouveau à se démarquer des autres méthodes.

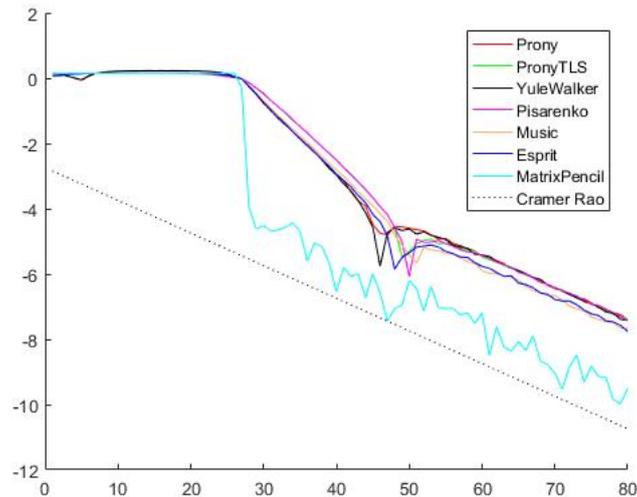
Enfin, nous avons testé le signal composé des fréquences  $\omega = \{1.100; 1.101; 1.102\}$  d'amplitude  $A = \{1.0; 1.0; 1.0\}$ .



Avec un tel niveau de rapprochement des fréquences, aucune des méthodes proposées ne fournit un résultats exploitable. On en conclut que l'espacement des fréquences influence de manière significative la précision de nos résultats.

### 4.2.3 Amplitudes relatives

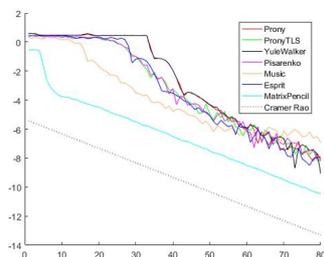
Dans un premier temps nous avons testé le signal composé des fréquences  $\omega = \{1.0; 2.0\}$  d'amplitude  $A = \{10; 0.1\}$ .



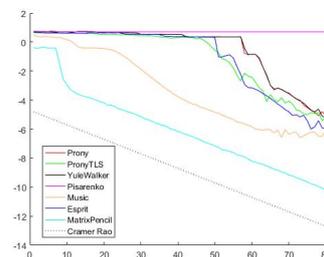
D'après nos résultats, la méthode Matrix-Pencil est de nouveau la méthode la plus précise. En outre, on remarque que pour des signaux peu bruités, les méthodes Music et Esprit sont un peu plus précises que les autres (Excepté Matrix-Pencil). Néanmoins, Les amplitudes relatives des fréquences semblent peu influencer la précision des résultats.

#### 4.2.4 Nombre de fréquences

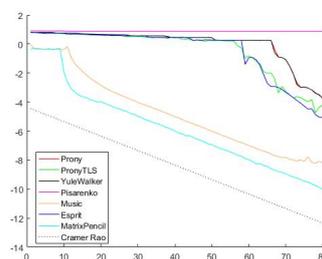
Pour ces tests, nous avons testé nos méthodes avec des signaux de la forme  $\omega = \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; \dots\}$  avec toutes ces fréquences d'amplitude 1.0.



5 fréquences



10 fréquences

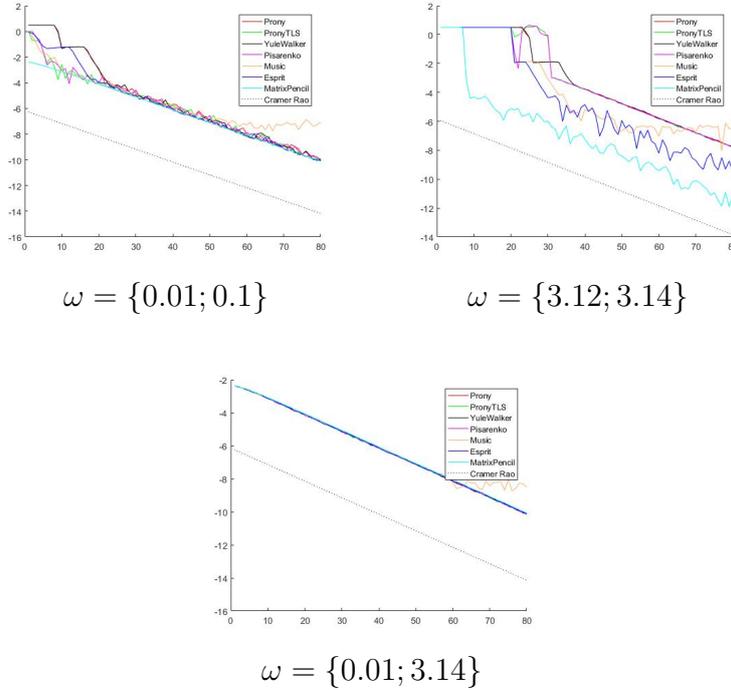


15 fréquences

D'après ces courbes, le nombre de fréquences influence grandement la précision de nos résultats. En effet, l'erreur croît rapidement avec le nombre de fréquences. Matrix-Pencil est encore une fois la méthode la plus performante. Cependant, contrairement aux résultats précédents, Root-Music semble plus performantes que nos méthodes (sauf Matrix-Pencil) lorsque le nombre de fréquence augmente.

On remarquera que le comportement de Pisarenko est instable : Au delà de 10 fréquences, les résultats deviennent inexploitable. En effet, cette méthode calculant par deux fois les valeurs propres d'une matrice, elle est très sensible à l'augmentation du nombre de calculs (directement lié à l'augmentation du nombre de fréquences) qui induit de grandes erreurs dues aux approximations numériques.

### 4.2.5 Localisation des fréquences

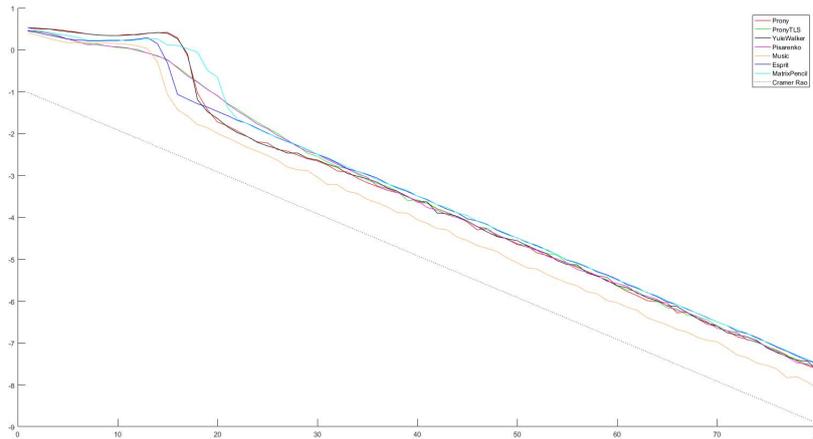


D'après nos résultats, la localisation des fréquences influence grandement la précisions obtenues sur les fréquences. Effectivement, pour des fréquences localisées proches de  $\pi$ , l'erreur commise est assez grande et ce sont les méthodes Matrix-Pencil, Music et Esprit qui sont les plus performantes. Pour des fréquences localisées en zéro, nous n'observons pas d'écart de performance par rapport à un cas classique.

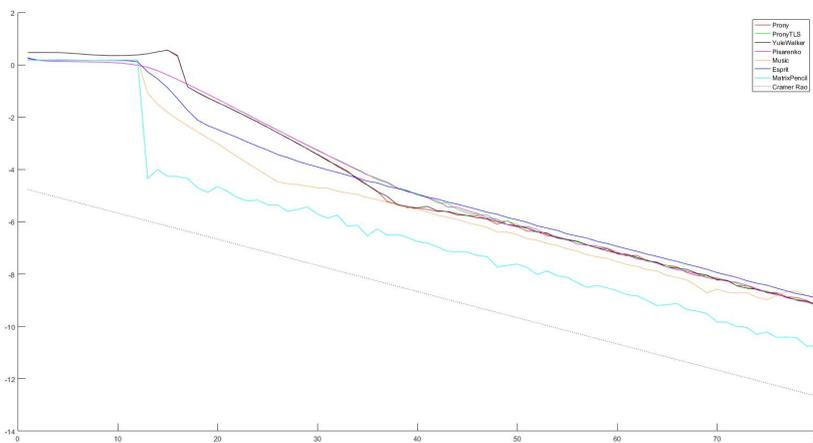
Enfin, on remarquera que lorsque les fréquences du signal sont localisées en 0 et en  $\pi$ , toutes les méthodes ont le même comportement (même si on retrouve l'erreur commise par Root-Music pour les signaux peu bruités).

### 4.2.6 Nombre d'échantillons du signal d'entrée

Lors de nos différents essais nous avons vu que le taille de l'échantillonnage d'entrée était un paramètre important dans la comparaison des méthodes. En effet, pour les mêmes fréquences  $\omega = \{2.33; 0.55; 2.9; 1.4567\}$  et amplitudes  $A = \{1.0; 2.0; 0.33; 2.5\}$ , voici ce que nous obtenons pour  $N = 15$  puis  $N = 255$  :



$N = 15$



$N = 255$

Ainsi, Matrix-Pencil semble être la méthode la plus impactée par un faible nombre d'échantillons présents dans le signal d'entrée. Les autres méthodes semblant peu touchées par ce changement.

#### 4.2.7 Temps de calcul

Nous avons mesuré nos temps de calcul sur le signal composé des fréquences  $\omega = \{1.0; 2.0; 3.0\}$  d'amplitude  $A = \{1.0; 1.0; 1.0\}$ . Nous avons moyenné sur 20 itération le temps d'exécution de chaque méthode pour un SNR allant de 0 à 80.

Methode	Temps CPU(s)
<i>Prony</i>	0.179
<i>Prony/TLS</i>	0.292
<i>YuleWalker</i>	0.264
<i>Pisarenko</i>	1.869
<i>Root – Music</i>	2.663
<i>Esprit</i>	36.267
<i>MatrixPencil</i>	19.265

La principale conclusion que l'on peut tirer de ces mesures est que l'on n'utilisera pas ces méthodes pour les mêmes objectifs. En effet, Même si Root-Music, Esprit et surtout Matrix-Pencil sont souvent les méthodes les plus performantes, ce sont aussi elles qui sont les plus

coûteuses. On ne les utilisera donc que lorsque l'on a besoin d'une grande précision sur les fréquences. Dans le cas contraire, les autres méthodes semblent plus adaptées.

### 4.3 Conclusion des expérimentations

En définitive, nos résultats montrent que ce sont le nombre de fréquence, leurs espacements et leurs localisations qui ont la plus grande influence sur la précision.

C'est la méthode Matrix-Pencil qui est la plus performante pour tous les types de signaux. Les méthodes Root-Music et Esprit arrivent en secondes position même si la première n'est pas à privilégier pour des signaux peu bruités. Ces trois méthodes étant également les plus coûteuses, il conviendra de réfléchir à la précision souhaitée avant de les utiliser.

En ce qui concerne les autres méthodes, elles sont toutes à peu près équivalentes même si l'usage de Pisarenko est à éviter pour des signaux avec un grand nombre de fréquences ( $\geq 10$ ).

Enfin, on remarquera que l'on atteint jamais la borne de Cramer-Rao (qui est égale à l'erreur théorique minimale). Cela est probablement dû au manque d'optimisation de nos algorithmes, trop sensibles aux erreurs de calcul numérique.

## 5 Conclusion

Ce projet a été effectué dans le but de comparer les différentes méthodes d'estimation de fréquences d'un signal composé de différentes exponentielles. Nous avons vu que la méthode par transformée de Fourier discrète, bien que très efficace en terme de temps de calcul (grâce à l'utilisation de l'algorithme de la transformée rapide) est peu précise du fait de sa faible résolution fréquentielle (décomposition des fréquences sur une grille discrète).

Parmi les diverses méthodes implémentées, nous avons cherché à estimer les méthodes les plus adaptées en fonction des différents paramètres d'entrée. Nous avons ainsi remarqué que Matrix-Pencil semble être la méthode la plus polyvalente bien qu'ayant un fort coût de calcul.

Pour conclure, il nous a semblé intéressant de comparer les résultats obtenus avec ceux décrits dans le papier de recherche de M. Olusegun A. Aboaba, "*A Review of Signal Parameter Estimation Techniques*". Voici ci-dessous une comparaison entre *ce qui y est exposé* et ce que nous avons pu observer :

— *Pour Yule-Walker, il y est précisé qu'un faible nombre d'échantillons en entrée entraîne une mauvaise reconstruction des fréquences.*

Lors des tests effectués avec différents nombre d'échantillons Yule-Walker nous a paru autant impacté que la méthode de Prony par cette différence, c'est cependant Matrix-Pencil qui semble donner des résultats bien moins bons pour un faible échantillonnage du signal.

— *Pour Music et Pisarenko les performances d'estimations sont, selon ce papier, plus mauvaises que les autres méthodes pour un faible SNR. De plus, pour un faible SNR, Prony-TLS ne permettrait alors qu'une estimation du même ordre que Fourier.*

Dans nos divers tests nous avons pu voir que pour de très faibles SNR, les méthodes convergent souvent vers un même niveau de précision. Esprit, Music et Matrix-Pencil

donnent globalement de meilleurs résultats que les autres méthodes à faible SNR. Dans nos tests, c'est plutôt à fort SNR que Music reste en retrait avec une précision stagnante face aux autres méthodes.

- *Music devrait permettre une meilleure estimation que les méthodes basées sur l'algorithme de Prony mais échouerait lorsque les fréquences recherchées sont trop rapprochées.* Cela semble se vérifier dans les tests que nous avons effectués (Espacement des fréquences), notamment au niveau des faibles SNR où Music produit une meilleure estimation que la plupart des algorithmes, cependant lorsque les fréquences sont plus rapprochées cet écart diminue.

Enfin, dans ce document, un désavantage souvent mentionné est de devoir connaître à l'avance le nombre  $K$  de fréquences recherchées, qu'il nous a été en effet nécessaire d'utiliser pour chaque méthode.

## Références

- LEGENDRE, A. M. 1805, *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, 1, F. Didot. [2](#)
- PRONY, R. 1795, «Essai experimental-, -», *J. de l'Ecole Polytechnique*. [2](#)
- STOICA, P., R. L. MOSES et collab.. 2005, *Spectral analysis of signals*, vol. 452, Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, NJ. [11](#)
- WALKER, G. 1931, «On periodicity in series of related terms», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 131, n° 818, p. 518–532. [7](#)
- YULE, G. U. 1927, «On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 226, p. 267–298. [7](#)